Module: Analyse 3 - Fonctions de Plusieurs Variables-

PROFESSEUR A. MOUSSAID

correction de Devoir Libre
A.P. 2: 2020-2021

EXERCICE 1
Soient $(E;d)$ un espace métrique, A un sous-ensemble non vide de E et x un élément de E.Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
a) $x \in \overline{A}$
b) $d(x, A) = 0$
c) il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x

---

correction.

- *a)* $\Rightarrow$ *b)*: si $x \in \overline{A}$, alors pour tout entier $n \geq 1$; la boule ouverte $B(x, \frac{1}{n})$ rencontre A,
(i.e il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$), on en déduit que $d(x, a) = 0$ quand $n \to +\infty$.

- *b)* $\Rightarrow$ *c)*: si $d(x, A) = 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $\{d(x, a)/a \in A\}$ donc il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$, on en déduit que la suite $(d(x, a_n))_{n\geq 1}$ converge vers 0, i.e. que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A converge vers x.

- *b)* $\Rightarrow$ *c)*: soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A converge vers x, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_n, x) < \varepsilon$ alors pour que $n \geq N$ donc $B(x, \varepsilon) \cap A$ contient $\{a_n/n \geq N\}$, en particulier $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ on en déduit que $x \in \overline{A}$.

EXERCICE 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer ensuite $\nabla f(0, 0)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

4°) La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$

---

correction.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} r\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = \lim_{r\to 0} 2r = 0 = f(0, 0)$$

Donc f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2°)

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2xy+y^2(x^2+y^2)-2x(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{(2xy+y^2(x^2+y^2)-2y(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ x^2\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

• Pour $(x,y) = (0,0)$, il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point (0, 0) n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3°) On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Ici on doit calculer la dérivée partielle sur le reste du domaine et vérifier si elle est continue ou non en (0, 0) qui est le seul point qui peut poser des problèmes.

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y^2\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que sur la droite $y = x$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2}$

Donc

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2} \neq \partial_x f(0,0)$$

On en déduit que la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

4°) La fonction f est différentiable en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(x-0)\partial_x f(0,0)-(y-0)\partial_y f(0,0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0$$

On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(x-0)\partial_x f(0,0)-(y-0)\partial_y f(0,0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Alors pour $x = y$ on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(x-0)\partial_x f(0,0)-(y-0)\partial_y f(0,0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Donc la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y\sin(2x) = 0 \tag{1}$$

1. *Vérifier que l'équation* (1) *définie une et une seule fonction* $y = \varphi(x)$ *au voisinage de* $(0,0)$.
2. *Calculer* $\varphi'(0)$ *et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction* φ *en le point* $(0,\varphi(0))$
3. *En déduire la limite de* $\frac{y}{x}$ *quand* (x,y) *tend vers* $(0,0)$

---

correction.

1°) On pose $f(x) = ye^x + e^y\sin(2x)$

On a $f(0,0) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x + 2e^y\cos(2x) \qquad \text{alors} \qquad \partial_x f(0,0) = 2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + e^y \sin(2x) \qquad \text{alors} \qquad \partial_y f(0,0) = 1$$

Puisque $\partial_y f(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$

2°) On a

$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -2$$

donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -2x$

3°) On a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = -2$$